

\$SPAD/input schaum18.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.369	$\int \cos ax \, dx$	3
2	[1]:14.370	$\int x \cos ax \, dx$	4
3	[1]:14.371	$\int x^2 \cos ax \, dx$	5
4	[1]:14.372	$\int x^3 \cos ax \, dx$	6
5	[1]:14.373	$\int \frac{\cos ax}{x} \, dx$	7
6	[1]:14.374	$\int \frac{\cos ax}{x^2} \, dx$	7
7	[1]:14.375	$\int \frac{dx}{\cos ax}$	8
8	[1]:14.376	$\int \frac{x \, dx}{\cos ax}$	10
9	[1]:14.377	$\int \cos^2 ax \, dx$	11
10	[1]:14.378	$\int x \cos^2 ax \, dx$	13
11	[1]:14.379	$\int \cos^3 ax \, dx$	16
12	[1]:14.380	$\int \cos^4 ax \, dx$	18
13	[1]:14.381	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax}$	19
14	[1]:14.382	$\int \frac{dx}{\cos^3 ax}$	21
15	[1]:14.383	$\int \cos px \cos qx \, dx$	23
16	[1]:14.384	$\int \frac{dx}{1 - \cos ax}$	25

17 [1]:14.385	$\int \frac{x dx}{1 - \cos ax}$	27
18 [1]:14.386	$\int \frac{dx}{1 + \cos ax}$	30
19 [1]:14.387	$\int \frac{x dx}{1 + \cos ax}$	31
20 [1]:14.388	$\int \frac{dx}{(1 - \cos ax)^2}$	33
21 [1]:14.389	$\int \frac{dx}{(1 + \cos ax)^2}$	35
22 [1]:14.390	$\int \frac{dx}{p + q \cos ax}$	37
23 [1]:14.391	$\int \frac{dx}{(p + q \cos ax)^2}$	41
24 [1]:14.392	$\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \cos^2 ax}$	46
25 [1]:14.393	$\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \cos^2 ax}$	52
26 [1]:14.394	$\int x^m \cos ax dx$	61
27 [1]:14.395	$\int \frac{\cos ax}{x^n} dx$	62
28 [1]:14.396	$\int \cos^n ax dx$	62
29 [1]:14.397	$\int \frac{1}{\cos^n ax} dx$	63
30 [1]:14.398	$\int \frac{x dx}{\cos^n ax}$	63

1 [1]:14.369 $\int \cos ax \, dx$

$$\int \cos ax = \frac{\sin ax}{a}$$

```

(*)≡
)spool schaum18.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(cos(a*x),x)
--R
--R
--R      sin(a x)
--R (1)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=sin(a*x)/a
--R
--R      sin(a x)
--R (2)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3      14:369 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.370 $\int x \cos ax \, dx$

$$\int x \cos ax = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 4
```

```
aa:=integrate(x*cos(a*x),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      a x sin(a x) + cos(a x)
```

```
--R (1) -----
```

```
--R              2
```

```
--R             a
```

```
--R
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 5
```

```
bb:=cos(a*x)/a^2+(x*sin(a*x))/a
```

```
--R
```

```
--R      a x sin(a x) + cos(a x)
```

```
--R (2) -----
```

```
--R              2
```

```
--R             a
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 6      14:370 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R (3)  0
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

3 [1]:14.371 $\int x^2 \cos ax \, dx$

$$\int x^2 \cos ax = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 7
aa:=integrate(x^2*cos(a*x),x)
--R
--R
--R      2 2
--R      (a x  - 2)sin(a x) + 2a x cos(a x)
--R (1) -----
--R                               3
--R                              a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 8
bb:=(2*x)/a^2*cos(a*x)+(x^2/a-2/a^3)*sin(a*x)
--R
--R      2 2
--R      (a x  - 2)sin(a x) + 2a x cos(a x)
--R (2) -----
--R                               3
--R                              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 9      14:371 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.372 $\int x^3 \cos ax \, dx$

$$\int x^3 \cos ax = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \sin ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 10
aa:=integrate(x^3*cos(a*x),x)
--R
--R
--R          3 3          2 2
--R      (a x  - 6a x)sin(a x) + (3a x  - 6)cos(a x)
--R (1) -----
--R                      4
--R                     a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 11
bb:=((3*x^2)/a^2-6/a^4)*cos(a*x)+(x^3/a-(6*x)/a^3)*sin(a*x)
--R
--R          3 3          2 2
--R      (a x  - 6a x)sin(a x) + (3a x  - 6)cos(a x)
--R (2) -----
--R                      4
--R                     a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 12      14:372 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.373 $\int \frac{\cos ax}{x} dx$

$$\int \frac{\cos ax}{x} = \ln x - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$$

```
<*>+≡
)clear all
```

```
--S 13      14:373 Schaums and Axiom agree by definition
```

```
aa:=integrate(cos(x)/x,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1) Ci(x)
```

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

6 [1]:14.374 $\int \frac{\cos ax}{x^2} dx$

$$\int \frac{\cos ax}{x^2} = -\frac{\cos ax}{x} - a \int \frac{\sin ax}{x}$$

```
<*>+≡
)clear all
```

```
--S 14      14:374 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(cos(a*x)/x^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R          x
--R      ++  cos(%I a)
--R (1)  | ----- d%I
--R      ++      2
--R          %I
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```


7 [1]:14.375 $\int \frac{dx}{\cos ax}$

$$\int \frac{1}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln(\sec ax - \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 15
aa:=integrate(1/cos(a*x),x)
--R
--R
--R      sin(a x) + cos(a x) + 1      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                     a
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 16
bb1:=1/a*log(sec(a*x)+tan(a*x))
--R
--R      log(tan(a x) + sec(a x))
--R (2) -----
--R                                     a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 17
bb2:=1/a*log(tan(%pi/4+(a*x)/2))
--R
--R      2a x + %pi
--R      log(tan(-----))
--R      4
--R (3) -----
--R                                     a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 18
cc1:=aa-bb1
--R
--R (4)
--R      sin(a x) + cos(a x) + 1

```

```

--R      - log(tan(a x) + sec(a x)) + log(-----)
--R                                          cos(a x) + 1
--R  +
--R      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R  - log(-----)
--R                    cos(a x) + 1
--R  /
--R  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 19
cc2:=aa-bb2
--R
--R  (5)
--R      2a x + %pi      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R  - log(tan(-----)) + log(-----)
--R                4                                cos(a x) + 1
--R  +
--R      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R  - log(-----)
--R                    cos(a x) + 1
--R  /
--R  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 20      14:375 Schaums and Axiom differ by a constant
complexNormalize cc1
--R
--R      log(- 1)
--R  (6) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

8 [1]:14.376 $\int \frac{x dx}{\cos ax}$

$$\int \frac{x}{\cos ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\}$$

<*)+≡

)clear all

--S 21 14:376 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x/cos(a*x),x)

--R

--R

--R

--I

--I

--R

--R

--E

$$(1) \quad \int \frac{x}{\cos(ax)} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

9 [1]:14.377 $\int \cos^2 ax \, dx$

$$\int \cos^2 ax = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 22
aa:=integrate(cos(a*x)^2,x)
--R
--R
--R      cos(a x)sin(a x) + a x
--R (1) -----
--R                    2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 23
bb:=x/2+sin(2*a*x)/(4*a)
--R
--R      sin(2a x) + 2a x
--R (2) -----
--R                    4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 24
cc:=aa-bb
--R
--R      - sin(2a x) + 2cos(a x)sin(a x)
--R (3) -----
--R                    4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 25
cossinrule:=rule(cos(b)*sin(a) == 1/2*(sin(a-b)+sin(a+b)))
--R
--R
--R      %M sin(b + a) - %M sin(b - a)
--R (4) %M cos(b)sin(a) == -----
--R                                  2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

--S 26 14:377 Schaums and Axiom agree

dd:=cossinrule cc

--R

--R (5) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

10 [1]:14.378 $\int x \cos^2 ax \, dx$

$$\int x \cos^2 ax = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 27
```

```
aa:=integrate(x*cos(a*x)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(1) \frac{2a^2 x \cos(ax) \sin(ax) + \cos^2(ax) + a^2 x^2}{4a^2}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 28
```

```
bb:=x^2/4+(x*sin(2*a*x))/(4*a)+cos(2*a*x)/(8*a^2)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(2) \frac{2a^2 x \sin(2ax) + \cos(2ax) + 2a^2 x^2}{8a^2}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 29
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(3) \frac{-2a^2 x \sin(2ax) + 4a^2 x \cos(ax) \sin(ax) - \cos(2ax) + 2\cos(ax)}{8a^2}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 30
```

```
cosinrule:=rule(cos(b)*sin(a) == 1/2*(sin(a-b)+sin(a+b)))
```

```
--R
```

```
--R
```

```

--I
--I      %N sin(b + a) - %N sin(b - a)
--I (4) %N cos(b)sin(a) == -----
--R                                     2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 31
dd:=cossinrule cc
--R
--R
--R      2
--R      - cos(2a x) + 2cos(a x)
--R (5) -----
--R      2
--R      8a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 32
coscosrule:=rule(cos(a)*cos(b) == 1/2*(cos(a-b)+cos(a+b)))
--R
--R
--I      %0 cos(b + a) + %0 cos(b - a)
--I (6) %0 cos(a)cos(b) == -----
--R                                     2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 33
ee:=coscosrule dd
--R
--R
--R      2
--R      - cos(2a x) + 2cos(a x)
--R (7) -----
--R      2
--R      8a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 34
cosqrrule1:=rule(cos(a)^2 == 1/2+1/2*cos(2*a))
--R
--R
--R      2      cos(2a) + 1
--R (8) cos(a) == -----
--R      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

--S 35 14:378 Schaums and Axiom differ by a constant

ff:=cossqrrule1 ee

--R

--R (9)
$$\frac{1}{8a^2}$$

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

11 [1]:14.379 $\int \cos^3 ax \, dx$

$$\int \cos^3 ax = \frac{\sin ax}{a} - \frac{\sin^3 ax}{3a}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 36
aa:=integrate(cos(a*x)^3,x)
--R
--R
--R          2
--R      (cos(a x) + 2)sin(a x)
--R (1)  -----
--R                3a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 37
bb:=sin(a*x)/a-sin(a*x)^3/(3*a)
--R
--R          3
--R      - sin(a x) + 3sin(a x)
--R (2)  -----
--R                3a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 38
cc:=aa-bb
--R
--R          3          2
--R      sin(a x) + (cos(a x) - 1)sin(a x)
--R (3)  -----
--R                3a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 39
cossqrrule:=rule(cos(a)^2 == 1-sin(a)^2)
--R
--R          2          2
--R (4)  cos(a) == - sin(a) + 1
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

--S 40 14:379 Schaums and Axiom agree

dd:=cossqrrule cc

--R

--R (5) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

12 [1]:14.380 $\int \cos^4 ax \, dx$

$$\int \cos^4 ax = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a}$$

(*)+≡
)clear all

--S 41

aa:=integrate(cos(a*x)^4,x)

--R

--R

--R

--R $(2\cos(ax)^3 + 3\cos(ax))\sin(ax) + 3ax$

--R (1) -----

--R $8a$

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 42

bb:=(3*x)/8+sin(2*a*x)/(4*a)+sin(4*a*x)/(32*a)

--R

--R $\sin(4ax) + 8\sin(2ax) + 12ax$

--R (2) -----

--R $32a$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 43

cc:=aa-bb

--R

--R

--R $-\sin(4ax) - 8\sin(2ax) + (8\cos(ax)^3 + 12\cos(ax))\sin(ax)$

--R (3) -----

--R $32a$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 44 14:380 Schaums and Axiom agree

complexNormalize cc

--R

--R (4) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

13 [1]:14.381 $\int \frac{dx}{\cos^2 ax}$
 $\int \frac{1}{\cos^2 ax} = \frac{\tan ax}{a}$

```

(*)+=
)clear all

--S 45
aa:=integrate(1/cos(a*x)^2,x)
--R
--R
--R      sin(a x)
--R (1)  -----
--R      a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 46
bb:=tan(a*x)/a
--R
--R      tan(a x)
--R (2)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 47
cc:=aa-bb
--R
--R      - cos(a x)tan(a x) + sin(a x)
--R (3)  -----
--R      a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 48
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R (4)  tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

--S 49 14:381 Schaums and Axiom agree

dd:=tanrule cc

--R

--R (5) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

14 [1]:14.382 $\int \frac{dx}{\cos^3 ax}$

$$\int \frac{1}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a \cos^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

(*)+=
)clear all

```
--S 50
aa:=integrate(1/cos(a*x)^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R      2      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      cos(a x) log(-----)
--R                      cos(a x) + 1
--R      +
--R      2      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - cos(a x) log(-----) + sin(a x)
--R                      cos(a x) + 1
--R      /
--R      2
--R      2a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 51
bb:=sin(a*x)/(2*a*cos(a*x)^2)+1/(2*a)*log(tan(%pi/4+(a*x)/2))
--R
--R
--R      2      2a x + %pi
--R      cos(a x) log(tan(-----)) + sin(a x)
--R                      4
--R (2) -----
--R                      2
--R                      2a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 52
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R      2a x + %pi      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(tan(-----)) + log(-----)
--R                      4                      cos(a x) + 1
--R
```

```

--R      +
--R      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----)
--R      cos(a x) + 1
--R /
--R 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 53      14:382 Schaums and Axiom differ by a constant
complexNormalize cc

```

```

--R
--R      log(- 1)
--R (4) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

15 [1]:14.383 $\int \cos px \cos qx \, dx$

$$\int \cos ax \cos px = \frac{\sin(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\sin(a+p)x}{2(a+p)}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 54
aa:=integrate(cos(a*x)*cos(p*x),x)
--R
--R      p cos(a x)sin(p x) - a cos(p x)sin(a x)
--R (1) -----
--R                2      2
--R             p  - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 55
bb:=(sin((a-p)*x))/(2*(a-p))+(sin((a+p)*x))/(2*(a+p))
--R
--R      (p - a)sin((p + a)x) + (p + a)sin((p - a)x)
--R (2) -----
--R                2      2
--R             2p  - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 56
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      (- p + a)sin((p + a)x) + 2p cos(a x)sin(p x) + (- p - a)sin((p - a)x)
--R      +
--R      - 2a cos(p x)sin(a x)
--R      /
--R      2      2
--R     2p  - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 57      14:383 Schaums and Axiom agree
complexNormalize cc
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```


--E

16 [1]:14.384 $\int \frac{dx}{1 - \cos ax}$

$$\int \frac{1}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 58
aa:=integrate(1/(1-cos(a*x)),x)
```

```
--R
--R
--R      - cos(a x) - 1
--R (1)  -----
--R      a sin(a x)
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 59
bb:=-1/a*cot((a*x)/2)
```

```
--R
--R      a x
--R      cot(---)
--R      2
--R (2)  - ----
--R      a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 60
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      a x
--R      cot(---)sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      2
--R (3)  -----
--R      a sin(a x)
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 61      14:384 Schaums and Axiom agree
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
--R (4)  0
```

Type: Expression Integer

--E

17 [1]:14.385 $\int \frac{x dx}{1 - \cos ax}$

$$\int \frac{x}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \cot \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{ax}{2}$$

(*)+≡
)clear all

```
--S 62
aa:=integrate(x/(1-cos(a*x)),x)
--R
--R (1)
--R          sin(a x)
--R          2
--R 2sin(a x)log(-----) - sin(a x)log(-----) - a x cos(a x) - a x
--R          cos(a x) + 1          cos(a x) + 1
--R -----
--R          2
--R          a sin(a x)
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 63
bb:=-x/a*cot((a*x)/2)+2/a^2*log(sin((a*x)/2))
--R
--R          a x          a x
--R 2log(sin(---)) - a x cot(---)
--R          2          2
--R (2) -----
--R          2
--R          a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 64
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          sin(a x)          a x
--R 2sin(a x)log(-----) - 2sin(a x)log(sin(---))
--R          cos(a x) + 1          2
--R +
--R          2          a x
--R - sin(a x)log(-----) + a x cot(---)sin(a x) - a x cos(a x) - a x
--R          cos(a x) + 1          2
--R /
```

```

--R      2
--R      a sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 65
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R      cos(a)
--R      (4) cot(a) == -----
--R      sin(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 66
dd:=cotrule cc
--R
--R      (5)
--R      a x      sin(a x)      a x      a x
--R      2sin(---)sin(a x)log(-----) - 2sin(---)sin(a x)log(sin(---))
--R      2          cos(a x) + 1      2          2
--R
--R      +
--R      a x      2      a x
--R      - sin(---)sin(a x)log(-----) + a x cos(---)sin(a x)
--R      2          cos(a x) + 1      2
--R
--R      +
--R      a x
--R      (- a x cos(a x) - a x)sin(---)
--R      2
--R
--R      /
--R      2      a x
--R      a sin(---)sin(a x)
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 67
ee:=expandLog dd
--R
--R      (6)
--R      a x      a x      a x
--R      2sin(---)sin(a x)log(sin(a x)) - 2sin(---)sin(a x)log(sin(---))
--R      2          2          2
--R
--R      +
--R      a x
--R      - sin(---)sin(a x)log(cos(a x) + 1)

```

```

--R          2
--R      +
--R          a x          a x          a x
--R      (- log(2)sin(---) + a x cos(---))sin(a x) + (- a x cos(a x) - a x)sin(---)
--R          2          2          2
--R /
--R      2 a x
--R      a sin(---)sin(a x)
--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 68      14:385 Schaums and Axiom agree
complexNormalize ee

```

```

--R
--R      (7)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

18 [1]:14.386 $\int \frac{dx}{1 + \cos ax}$

$$\int \frac{1}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 69
aa:=integrate(1/(1+cos(a*x)),x)
--R
--R      sin(a x)
--R (1) -----
--R      a cos(a x) + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 70
bb:=1/a*tan((a*x)/2)
--R
--R      a x
--R      tan(---)
--R      2
--R (2) -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 71
cc:=aa-bb
--R
--R      a x
--R      (- cos(a x) - 1)tan(---) + sin(a x)
--R      2
--R (3) -----
--R      a cos(a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 72      14:386 Schaums and Axiom agree
complexNormalize cc
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

19 [1]:14.387 $\int \frac{x dx}{1 + \cos ax}$

$$\int \frac{x}{1 + \cos ax} = \frac{x}{a} \tan \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{ax}{2}$$

(*)+≡
)clear all

--S 73
aa:=integrate(x/(1+cos(a*x)),x)

```
--R
--R
--R
--R              2
--R      (- cos(a x) - 1)log(-----) + a x sin(a x)
--R                    cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R              2      2
--R          a cos(a x) + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

--S 74
bb:=x/a*tan((a*x)/2)+2/a^2*log(cos((a*x)/2))

```
--R
--R              a x      a x
--R      2log(cos(---)) + a x tan(---)
--R              2      2
--R (2) -----
--R              2
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

--S 75
cc:=aa-bb

```
--R
--R (3)
--R              a x      2
--R      (- 2cos(a x) - 2)log(cos(---)) + (- cos(a x) - 1)log(-----)
--R              2      cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R              a x
--R      (- a x cos(a x) - a x)tan(---) + a x sin(a x)
--R              2
--R
--R      /
```



```

--R      2      2
--R      a cos(a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 76
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)
--R
--R                                          a x
--R      (cos(a x) + 1)log(cos(a x) + 1) + (- 2cos(a x) - 2)log(cos(---))
--R                                          2
--R
--R      +
--R
--R                                          a x
--R      (- a x cos(a x) - a x)tan(---) + a x sin(a x) - log(2)cos(a x) - log(2)
--R                                          2
--R
--R      /
--R      2      2
--R      a cos(a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 77      14:387 Schaums and Axiom agree
complexNormalize dd
--R
--R      (5)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

20 [1]:14.388 $\int \frac{dx}{(1 - \cos ax)^2}$

$$\int \frac{1}{(1 - \cos ax)^2} = -\frac{1}{2a} \cot \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \cot^3 \frac{ax}{2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 78
```

```
aa:=integrate(1/(1-cos(a*x))^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2
```

```
--R      - cos(a x) + cos(a x) + 2
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      (3a cos(a x) - 3a)sin(a x)
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 79
```

```
bb:=-1/(2*a)*cot((a*x)/2)-1/(6*a)*cot((a*x)/2)^3
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      a x 3      a x
```

```
--R      - cot(---) - 3cot(---)
```

```
--R      2      2
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      6a
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 80
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (3)
```

```
--R      a x 3      a x      2
```

```
--R      ((cos(a x) - 1)cot(---) + (3cos(a x) - 3)cot(---))sin(a x) - 2cos(a x)
```

```
--R      2      2
```

```
--R      +
```

```
--R      2cos(a x) + 4
```

```
--R /
```

```
--R      (6a cos(a x) - 6a)sin(a x)
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 81 14:388 Schaums and Axiom agree
```

```
complexNormalize cc
```

```
--R
```

```
--R (4) 0
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

21 [1]:14.389 $\int \frac{dx}{(1 + \cos ax)^2}$

$$\int \frac{1}{(1 + \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \tan \frac{ax}{2} + \frac{1}{6a} \tan^3 \frac{ax}{2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 82
```

```
aa:=integrate(1/(1+cos(a*x))^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      (cos(a x) + 2)sin(a x)
--R (1) -----
--R              2
--R      3a cos(a x) + 6a cos(a x) + 3a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 83
```

```
bb:=1/(2*a)*tan((a*x)/2)+1/(6*a)*tan((a*x)/2)^3
```

```
--R
```

```
--R      a x 3      a x
--R      tan(---) + 3tan(---)
--R              2          2
--R (2) -----
--R              6a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 84
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R (3)
```

```
--R      2          a x 3
--R      (- cos(a x) - 2cos(a x) - 1)tan(---)
--R              2
--R      +
--R      2          a x
--R      (- 3cos(a x) - 6cos(a x) - 3)tan(---) + (2cos(a x) + 4)sin(a x)
--R              2
--R      /
--R      2
--R      6a cos(a x) + 12a cos(a x) + 6a
```

Type: Expression Integer

--E

--S 85 14:389 Schaums and Axiom agree
complexNormalize cc

--R

--R (4) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

22 [1]:14.390 $\int \frac{dx}{p + q \cos ax}$

$$\int \frac{1}{p + q \cos ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{p^2 - q^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{p-q}{p+q}} \tan \frac{1}{2}ax \\ \frac{1}{a\sqrt{q^2 - p^2}} \ln \left(\frac{\tan \frac{1}{2}ax + \sqrt{\frac{q+p}{q-p}}}{\tan \frac{1}{2}ax - \sqrt{\frac{q+p}{q-p}}} \right) \end{cases}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 86
aa:=integrate(1/(p+q*cos(a*x)),x)
```

```
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      2 2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (- q + p )sin(a x)
--R      log(-----)
--R          q cos(a x) + p
--R      [-----,
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a\|q - p
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          sin(a x)\|- q + p
--R      2atan(-----)
--R          (q + p)cos(a x) + q + p
--R      -----]
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a\|- q + p
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 87
bb1:=2/(a*sqrt(p^2-q^2))*atan(sqrt((p-q)/(p+q))*tan(1/2*a*x))
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          a x  \|- q + p
--R      2atan(tan(---) |----- )
--R          2  \| q + p
--R (2) -----
```

```

--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      a\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 88
bb2:=1/(a*sqrt(q^2-p^2))*log((tan(1/2*a*x)+sqrt((q+p)/(q-p)))/(tan(1/2*a*x)-sqrt((q+p)

```

```

--R
--R          +-----+
--R          |q + p      a x
--R      - |----- - tan(----)
--R          \|q - p      2
--R      log(-----)
--R          +-----+
--R          |q + p      a x
--R          |----- - tan(----)
--R          \|q - p      2
--R      (3) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      a\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 89
cc1:=aa.1-bb1

```

```

--R
--R      (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (- q + p )sin(a x)
--R      \|- q + p log(-----)
--R                                          q cos(a x) + p
--R
--R      +
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          a x | - q + p
--R      - 2\|q - p atan(tan(----) |----- )
--R                          2 \| q + p
--R
--R      /
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2 | 2 2
--R      a\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```



```

--R (7)
--R
--R          +-----+
--R          |q + p      a x
--R          |----- - tan(---)
--R          +-----+
--R          |  2  2      \|q - p
--R          - \|- q  + p log(-----)
--R          +-----+
--R          |q + p      a x
--R          |----- - tan(---)
--R          \|q - p      2
--R
--R +
--R          +-----+
--R          |  2  2      sin(a x)\|- q  + p
--R          2\|q - p atan(-----)
--R          (q + p)cos(a x) + q + p
--R
--R /
--R          +-----+ +-----+
--R          |  2  2 | 2  2
--R          a\|- q  + p \|q - p
--R
--E

```

Type: Expression Integer

23 [1]:14.391 $\int \frac{dx}{(p + q \cos ax)^2}$

$$\int \frac{1}{(p + q \cos ax)^2} = \frac{q \sin ax}{a(q^2 - p^2)(p + q \cos ax)} - \frac{p}{q^2 - p^2} \int \frac{1}{p + q \cos ax}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 93
aa:=integrate(1/(p+q*cos(a*x))^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R [
--R
--R      2
--R      (p q cos(a x) + p )
--R      *
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2 2 2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q - p + (q - p )sin(a x)
--R      log(-----)
--R
--R      q cos(a x) + p
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      q sin(a x)\|q - p
--R
--R      /
--R
--R      +-----+
--R      3 2 2 3 | 2 2
--R      ((a q - a p q)cos(a x) + a p q - a p )\|q - p
--R
--R      ,
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2 sin(a x)\|- q + p
--R      (- 2p q cos(a x) - 2p )atan(-----)
--R
--R      (q + p)cos(a x) + q + p
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      q sin(a x)\|- q + p
--R
--R      /
--R
--R      +-----+
--R      3 2 2 3 | 2 2
--R      ((a q - a p q)cos(a x) + a p q - a p )\|- q + p

```

```
--R ]
--R                                         Type: Union(List Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 94
```

```
t1:=integrate(1/(p+q*cos(a*x)),x)
```

```
--R
--R (2)
--R                                     +-----+
--R                                     | 2  2      2  2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q  - p  + (- q  + p )sin(a x)
--R    log(-----)
--R                                     q cos(a x) + p
--R  [-----,
--R                                     +-----+
--R                                     | 2  2
--R                                     a\|q  - p
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      sin(a x)\|- q  + p
--R  2atan(-----)
--R      (q + p)cos(a x) + q + p
--R  -----]
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      a\|- q  + p
```

```
Type: Union(List Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 95
```

```
bb1:=(q*sin(a*x))/(a*(q^2-p^2)*(p+q*cos(a*x)))-p/(q^2-p^2)*t1.1
```

```
--R
--R (3)
--R                                     2
--R      (- p q cos(a x) - p )
--R    *
--R                                     +-----+
--R                                     | 2  2      2  2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q  - p  + (- q  + p )sin(a x)
--R    log(-----)
--R                                     q cos(a x) + p
--R  +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      q sin(a x)\|q  - p
--R  /
```

```

--R
--R
--R      +-----+
--R      3      2      2      3 | 2  2
--R      ((a q  - a p q)cos(a x) + a p q  - a p )\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 96

bb2:=(q*sin(a*x))/(a*(q^2-p^2)*(p+q*cos(a*x)))-p/(q^2-p^2)*t1.2

```

--R
--R      (4)
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      +-----+
--R      2      sin(a x)\|- q  + p      | 2  2
--R      (- 2p q cos(a x) - 2p )atan(-----) + q sin(a x)\|- q  + p
--R      (q + p)cos(a x) + q + p
--R
--R      -----
--R
--R      +-----+
--R      3      2      2      3 | 2  2
--R      ((a q  - a p q)cos(a x) + a p q  - a p )\|- q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 97

cc1:=aa.1-bb1

```

--R
--R      (5)
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      2  2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q  - p  + (q  - p )sin(a x)
--R      p log(-----)
--R      q cos(a x) + p
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      2  2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q  - p  + (- q  + p )sin(a x)
--R      p log(-----)
--R      q cos(a x) + p
--R
--R      /
--R
--R      +-----+
--R      2      2 | 2  2
--R      (a q  - a p )\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 98

cc2:=aa.2-bb1

```

--R
--R (6)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (- q + p )sin(a x)
--R          p\|- q + p log(-----)
--R                                     q cos(a x) + p
--R
--R +
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      sin(a x)\|- q + p
--R          - 2p\|q - p atan(-----)
--R                               (q + p)cos(a x) + q + p
--R
--R /
--R
--R          +-----+ +-----+
--R          2 2 | 2 2 | 2 2
--R          (a q - a p)\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 99
cc3:=aa.1-bb2

```

```

--R
--R (7)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (q - p )sin(a x)
--R          p\|- q + p log(-----)
--R                                     q cos(a x) + p
--R
--R +
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      sin(a x)\|- q + p
--R          2p\|q - p atan(-----)
--R                               (q + p)cos(a x) + q + p
--R
--R /
--R
--R          +-----+ +-----+
--R          2 2 | 2 2 | 2 2
--R          (a q - a p)\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 100 14:391 Schaums and Axiom agree
cc4:=aa.2-bb2

```

```

--R
--R (8) 0

```

--R
--E

Type: Expression Integer

24 [1]:14.392 $\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \cos^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 + q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2 + q^2}} \tan^{-1} \frac{p \tan ax}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 101
```

```
aa:=integrate(1/(p^2+q^2*cos(a*x)^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

$$\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\sin(ax)\sqrt{q^2+p^2}}{2p\cos(ax)+2p}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{((q^2-p^2)\cos(ax)-2p^2)\sin(ax)}{(p\cos(ax)^2+2p\cos(ax)+p)\sqrt{q^2+p^2}}\right)}{a p \sqrt{q^2+p^2}}$$

```
--E
```

```
--S 102
```

```
bb:=1/(a*p*sqrt(p^2+q^2))*atan((p*tan(a*x))/sqrt(p^2+q^2))
```

```
--R
```

$$\operatorname{atan}\left(\frac{p \tan(ax)}{\sqrt{q^2+p^2}}\right)$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--S 103
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```

--R (3)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      sin(a x)\|q  + p      p tan(a x)
--R      atan(-----) - atan(-----)
--R          2p cos(a x) + 2p          +-----+
--R                                     | 2  2
--R                                     \|q  + p
--R  +
--R          2  2      2
--R      ((q  - p )cos(a x) - 2p )sin(a x)
--R      - atan(-----)
--R                                     +-----+
--R          2      | 2  2
--R      (p cos(a x)  + 2p cos(a x) + p)\|q  + p
--R  /
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      a p\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 104
dd:=ratDenom cc

```

```

--R (4)
--R          +-----+
--R          | 2  2      p tan(a x)\|q  + p
--R      - \|q  + p atan(-----)
--R                          2  2
--R                          q  + p
--R  +
--R      -
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|q  + p
--R  *
--R          +-----+
--R          2  2      2      | 2  2
--R      ((q  - p )cos(a x) - 2p )sin(a x)\|q  + p
--R      atan(-----)
--R          2  3      2      2  3      2  3
--R      (p q  + p )cos(a x)  + (2p q  + 2p )cos(a x) + p q  + p
--R  +
--R          +-----+

```



```

--R      +-----+          | 2  2
--R      | 2  2      sin(a x)\|q  + p
--R      \|q  + p  atan(-----)
--R                        2p cos(a x) + 2p
--R  /
--R      2      3
--R      a p q  + a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 105
atanrule2:=rule(atan(x) == 1/2*i*(log(1-i*x)-log(1+i*x)))
--R
--R      1          1
--R  (5)  atan(x) == - - %i log(%i x + 1) + - %i log(- %i x + 1)
--R      2          2
--RType: RewriteRule(Integer,Complex Fraction Integer,Expression Complex Fraction Integer)
--E

```

```

--S 106
ee:=atanrule2 dd
--R
--R  (6)
--R      +-----+
--R      +-----+          | 2  2      2  2
--R      1 | 2  2      %i p tan(a x)\|q  + p  + q  + p
--R      - %i\|q  + p  log(-----)
--R      2          2  2
--R                        q  + p
--R  +
--R      +-----+
--R      1 | 2  2
--R      - %i\|q  + p
--R      2
--R  *
--R      log
--R      +-----+
--R      2  2          2  2          | 2  2
--R      ((%i q  - %i p )cos(a x) - 2%i p )sin(a x)\|q  + p
--R      +
--R      2  3      2  2      3      2  3
--R      (p q  + p )cos(a x)  + (2p q  + 2p )cos(a x) + p q  + p
--R  /
--R      2  3      2  2      3      2  3
--R      (p q  + p )cos(a x)  + (2p q  + 2p )cos(a x) + p q  + p
--R  +

```



```

--R (7)
--R
--R      +-----+
--R      1 | 2 2
--R      - - %i\|q + p log(p tan(a x)\|q + p + %i q + %i p )
--R      2
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      1 | 2 2
--R      - %i\|q + p log(p tan(a x)\|q + p - %i q - %i p )
--R      2
--R
--R      +
--R      -
--R      +-----+
--R      1 | 2 2
--R      - %i\|q + p
--R      2
--R
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      2 2 2 | 2 2
--R      ((q - p )cos(a x) - 2p )sin(a x)\|q + p
--R
--R      +
--R      2 3 2 2 3
--R      (%i p q + %i p )cos(a x) + (2%i p q + 2%i p )cos(a x)
--R
--R      +
--R      2 3
--R      %i p q + %i p
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      1 | 2 2
--R      - %i\|q + p
--R      2
--R
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      2 2 2 | 2 2
--R      ((q - p )cos(a x) - 2p )sin(a x)\|q + p
--R
--R      +
--R      2 3 2 2 3
--R      (- %i p q - %i p )cos(a x) + (- 2%i p q - 2%i p )cos(a x)
--R
--R      +
--R      2 3
--R      - %i p q - %i p
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      1 | 2 2
--R      +-----+
--R      | 2 2

```

```

--R      - %i\|q + p log(sin(a x)\|q + p + 2%i p cos(a x) + 2%i p)
--R      2
--R      +
--R      +-----+          +-----+
--R      1 | 2 2          | 2 2
--R      - - %i\|q + p log(sin(a x)\|q + p - 2%i p cos(a x) - 2%i p)
--R      2
--R      +
--R      +-----+
--R      1 1 1 1          | 2 2
--R      (%i log(%i) - - %i log(- %i) + - %i log(- - %i) - %i log(- %i))\|q + p
--R      2 2 2 2
--R      /
--R      2 3
--R      a p q + a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Fraction Integer
--E

```

--S 108 14:392 Schaums and Axiom differ by a constant
complexNormalize ff

```

--R
--R      (8)
--R      1 1 1 1          1
--R      %i log(%i) - - %i log(- %i) + - %i log(- - %i) - %i log(- %i)
--R      2 2 2 2          2
--R      +
--R      1
--R      - - %i log(- 1)
--R      2
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q + p
--R      /
--R      2 3
--R      a p q + a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Fraction Integer
--E

```

25 [1]:14.393 $\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \cos^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 - q^2 \cos^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ap\sqrt{p^2 - q^2}} \tan^{-1} \frac{p \tan ax}{\sqrt{p^2 - q^2}} \\ \frac{1}{2ap\sqrt{q^2 - p^2}} \ln \left(\frac{p \tan ax - \sqrt{q^2 - p^2}}{p \tan ax + \sqrt{q^2 - p^2}} \right) \end{cases}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 109
```

```
aa:=integrate(1/(p^2-q^2*cos(a*x)^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R
```

```

--R          +-----+
--R          2      2      2      2 | 2      2      2      3
--R          ((q  - 2p )cos(a x) + p)\|q  - p  + (- 2p q  + 2p )cos(a x)sin(a x)
--R  log(-----)
--R                                     2      2      2
--R                                     q cos(a x)  - p
--R  [-----,
--R                                     +-----+
--R                                     | 2      2
--R                                     2a p\|q  - p
--R
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          sin(a x)\|- q  + p
--R  atan(-----)
--R          2p cos(a x) + 2p
--R  +
--R          2      2      2
--R          ((q  + p )cos(a x) + 2p )sin(a x)
--R  atan(-----)
--R                                     +-----+
--R          2      2      2      2
--R          (p cos(a x)  + 2p cos(a x) + p)\|- q  + p
--R  /
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          a p\|- q  + p
--R  ]
```

```
--R                                         Type: Union(List Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 110
bb1:=1/(a*p*sqrt(p^2-q^2))*atan((p*tan(a*x))/sqrt(p^2-q^2))
```

```
--R
--R          p tan(a x)
--R      atan(-----)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|- q  + p
--R (2) -----
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          a p\|- q  + p
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 111
bb2:=1/(2*a*p*sqrt(q^2-p^2))*log((p*tan(a*x)-sqrt(q^2-p^2))/(p*tan(a*x)+sqrt(q^2-p^2)))
```

```
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      - \|q  - p  + p tan(a x)
--R      log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|q  - p  + p tan(a x)
--R (3) -----
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          2a p\|q  - p
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 112
cc1:=aa.1-bb1
```

```
--R
--R (4)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|- q  + p
--R      *
--R      log
--R
--R          2      2      2      2      +-----+
--R          | 2  2
```

```

--R      ((q - 2p )cos(a x) + p )\|q - p
--R      +
--R      2 3
--R      (- 2p q + 2p )cos(a x)sin(a x)
--R      /
--R      2 2 2
--R      q cos(a x) - p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      p tan(a x)
--R      - 2\|q - p atan(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2
--R      2a p\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 113
cc2:=aa.2-bb1

```

```

--R      (5)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      sin(a x)\|- q + p      p tan(a x)
--R      atan(-----) - atan(-----)
--R      2p cos(a x) + 2p      +-----+
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      +
--R      2 2      2
--R      ((q + p )cos(a x) + 2p )sin(a x)
--R      atan(-----)
--R      +-----+
--R      2      | 2 2
--R      (p cos(a x) + 2p cos(a x) + p)\|- q + p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a p\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 114
cc3:=aa.1-bb2
--R
--R (6)
--R log
--R
--R          +-----+
--R          2      2      2      2 | 2      2      2      3
--R          ((q  - 2p )cos(a x)  + p )\|q  - p  + (- 2p q  + 2p )cos(a x)sin(a x)
--R          -----
--R                                     2      2      2
--R                                     q cos(a x)  - p
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          - \|q  - p  + p tan(a x)
--R
--R - log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          \|q  - p  + p tan(a x)
--R
--R /
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          2a p\|q  - p
--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 115
cc4:=aa.2-bb2
--R
--R (7)
--R
--R          +-----+
--R          +-----+ | 2      2
--R          | 2      2      - \|q  - p  + p tan(a x)
--R          - \|- q  + p  log(-----)
--R                                     +-----+
--R                                     | 2      2
--R                                     \|q  - p  + p tan(a x)
--R
--R +
--R          +-----+
--R          +-----+ | 2      2
--R          | 2      2      sin(a x)\|- q  + p
--R          2\|q  - p  atan(-----)
--R                                     2p cos(a x) + 2p
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2      2      2      2      2
--R          ((q  + p )cos(a x) + 2p )sin(a x)

```



```

--R      2\|q  - p  atan(-----)
--R                                     +-----+
--R                                     |  2  2
--R      (p cos(a x)  + 2p cos(a x) + p)\|- q  + p
--R /
--R      +-----+ +-----+
--R      |  2  2 |  2  2
--R      2a p\|- q  + p  \|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 116

dd2:=ratDenom cc2

```

--R
--R      (8)
--R                                     +-----+
--R      +-----+ |  2  2
--R      |  2  2  p tan(a x)\|- q  + p
--R      - \|- q  + p  atan(-----)
--R                                     2  2
--R                                     q  - p
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      \|- q  + p
--R
--R      *
--R                                     +-----+
--R      2  2 2 2 |  2  2
--R      ((q  + p )cos(a x) + 2p )sin(a x)\|- q  + p
--R      atan(-----)
--R      2  3 2 2 3 2 3
--R      (p q  - p )cos(a x)  + (2p q  - 2p )cos(a x) + p q  - p
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      +-----+ |  2  2
--R      |  2  2  sin(a x)\|- q  + p
--R      - \|- q  + p  atan(-----)
--R                                     2p cos(a x) + 2p
--R
--R      /
--R      2  3
--R      a p q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 117

tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))

```

--R
--R      sin(a)
--R      (9) tan(a) == -----
--R                      cos(a)
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 118
ee2:=tanrule dd2

```

```

--R
--R      (10)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R
--R      *
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      ((q + p )cos(a x) + 2p )sin(a x)\|- q + p
--R
--R      atan(-----)
--R      2 3 2 2 3 2 3
--R      (p q - p )cos(a x) + (2p q - 2p )cos(a x) + p q - p
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      sin(a x)\|- q + p
--R
--R      - \|- q + p atan(-----)
--R
--R      2p cos(a x) + 2p
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      p sin(a x)\|- q + p
--R
--R      - \|- q + p atan(-----)
--R
--R      2 2
--R      (q - p )cos(a x)
--R
--R      /
--R
--R      2 3
--R      a p q - a p
--R
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 119
atanrule2:=rule(atan(x) == 1/2*i*(log(1-i*x)-log(1+i*x)))

```

```

--R
--R
--R      1 1
--R      (11) atan(x) == - - %i log(%i x + 1) + - %i log(- %i x + 1)
--R      2 2

```

--RType: RewriteRule(Integer,Complex Fraction Integer,Expression Complex Fraction Integer)
--E

--S 120

ff2:=atanrule2 ee2

--R

(12)

--R

-

--R

+-----+

--R

1 | 2 2
- %i\|- q + p

--R

2

--R

*

--R

log

--R

+-----+

--R

2 2 2 | 2 2
((%i q + %i p)cos(a x) + 2%i p)sin(a x)\|- q + p

--R

+

--R

2 3 2 2 3 2 3
(p q - p)cos(a x) + (2p q - 2p)cos(a x) + p q - p

--R

/

--R

2 3 2 2 3 2 3
(p q - p)cos(a x) + (2p q - 2p)cos(a x) + p q - p

--R

+

--R

+-----+

--R

1 | 2 2
- %i sin(a x)\|- q + p + p cos(a x) + p

--R

1 | 2 2 2
- %i\|- q + p log(-----)

--R

2

p cos(a x) + p

--R

+

--R

+-----+

--R

1 | 2 2 %i p sin(a x)\|- q + p + (q - p)cos(a x)

--R

2

2 2
(q - p)cos(a x)

--R

+

--R

+-----+

--R

1 | 2 2 - %i p sin(a x)\|- q + p + (q - p)cos(a x)

--R

2

2 2
(q - p)cos(a x)

--R

+

--R

+-----+

--R

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - - %i sin(a x)\|- q + p + p cos(a x) + p
--R          2
--R          - - %i\|- q + p log(-----)
--R          2
--R          p cos(a x) + p
--R
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - %i\|- q + p
--R          2
--R
--R      *
--R      log
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          ((- %i q - %i p )cos(a x) - 2%i p )sin(a x)\|- q + p
--R
--R      +
--R          2 3      2      2 3      2 3
--R          (p q - p )cos(a x) + (2p q - 2p )cos(a x) + p q - p
--R
--R      /
--R          2 3      2      2 3      2 3
--R          (p q - p )cos(a x) + (2p q - 2p )cos(a x) + p q - p
--R
--R      /
--R          2      3
--R      a p q - a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Fraction Integer
--E

```

--S 121

gg2:=expandLog ff2

```

--R
--R      (13)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - %i\|- q + p
--R          2
--R
--R      *
--R      log
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          ((q + p )cos(a x) + 2p )sin(a x)\|- q + p
--R
--R      +
--R          2 3      2      2 3      3
--R          (%i p q - %i p )cos(a x) + (2%i p q - 2%i p )cos(a x) + %i p q
--R
--R      +
--R          3
--R          - %i p

```

```

--R      +
--R      -
--R      +-----+
--R      1 | 2 2
--R      - %i\|- q + p
--R      2
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      2 2      2      | 2 2
--R      ((q + p )cos(a x) + 2p )sin(a x)\|- q + p
--R      +
--R      2      3      2      2      3
--R      (- %i p q + %i p )cos(a x) + (- 2%i p q + 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R      2      3
--R      - %i p q + %i p
--R      +
--R      +-----+      +-----+
--R      1 | 2 2      | 2 2      2      2
--R      - %i\|- q + p log(p sin(a x)\|- q + p + (%i q - %i p )cos(a x))
--R      2
--R      +
--R      +-----+      +-----+
--R      1 | 2 2      | 2 2      2      2
--R      - %i\|- q + p log(p sin(a x)\|- q + p + (- %i q + %i p )cos(a x))
--R      2
--R      +
--R      +-----+      +-----+
--R      1 | 2 2      | 2 2
--R      - %i\|- q + p log(sin(a x)\|- q + p + 2%i p cos(a x) + 2%i p)
--R      2
--R      +
--R      +-----+      +-----+
--R      1 | 2 2      | 2 2
--R      - %i\|- q + p log(sin(a x)\|- q + p - 2%i p cos(a x) - 2%i p)
--R      2
--R      +
--R      +-----+
--R      1      1      1      1      | 2 2
--R      (- %i log(- %i) - - %i log(- - %i))\|- q + p
--R      2      2      2      2
--R      /
--R      2      3
--R      a p q - a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Fraction Integer

```

```

--E
--S 122      14:393 Schaums and Axiom differ by a constant
hh2:=complexNormalize gg2
--R
--R (14)
--R      1      1      1      1      1      1
--R      (- - %i log(%i) + - %i log(- %i) - - %i log(- %i) + - %i log(- %i))
--R      2      2      2      2      2      2
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      /
--R      2      3
--R      a p q - a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Fraction Integer
--E

```

26 [1]:14.394 $\int x^m \cos ax \, dx$

$$\int x^m \cos ax = \frac{x^m \sin ax}{a} + \frac{mx^{m-1}}{a^2} \cos ax - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \cos ax$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 123      14:394 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(x^m*cos(a*x),x)
--R
--R
--R      x
--R      ++      m
--R      (1) | cos(%I a)%I d%I
--R      ++
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

27 [1]:14.395 $\int \frac{\cos ax}{x^n} dx$

$$\int \frac{\cos ax}{x^n} = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 124 14:395 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(cos(a*x)/x^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--I      x
--I      ++ cos(%I a)
--I (1) | ----- d%I
--R      ++      n
--I      %I
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--R
```

```
--E
```

28 [1]:14.396 $\int \cos^n ax dx$

$$\int \cos^n ax = \frac{\sin ax \cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 125 14:396 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(cos(a*x)^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      x
--R      ++      n
--I (1) | cos(%I a) d%I
--R      ++
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--R
```

```
--E
```

29 [1]:14.397 $\int \frac{1}{\cos^n ax} dx$

$$\int \frac{1}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1}ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cos^{n-2}ax}$$

```
<*)+≡
)clear all
```

```
--S 126 14:397 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(1/(cos(a*x))^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      x
--R      ++      1
--R      (1) | ----- d%I
--R      ++      n
--R      cos(%I a)
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--R
```

```
--E
```

30 [1]:14.398 $\int \frac{x dx}{\cos^n ax}$

$$\int \frac{x}{\cos^n ax} = \frac{x \sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1}ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\cos^{n-2}ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x}{\cos^{n-2}ax}$$

```
<*)+≡
)clear all
```

```
--S 127 14:398 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(x/cos(a*x)^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      x
--R      ++      %I
--R      (1) | ----- d%I
--R      ++      n
--R      cos(%I a)
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--R
```

```
--E
```

```
)spool
)lisp (bye)
```


References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp77-78