

\$SPAD/input schaum20.input

Timothy Daly

June 15, 2008

## Contents

1	[1]:14.429	$\int \tan ax \, dx$	3
2	[1]:14.430	$\int \tan^2 ax \, dx$	5
3	[1]:14.431	$\int \tan^3 ax \, dx$	6
4	[1]:14.432	$\int \tan^n ax \sec^2 ax \, dx$	8
5	[1]:14.433	$\int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax} \, dx$	10
6	[1]:14.434	$\int \frac{dx}{\tan ax} \, dx$	12
7	[1]:14.435	$\int x \tan ax \, dx$	13
8	[1]:14.436	$\int \frac{\tan ax}{x} \, dx$	13
9	[1]:14.437	$\int x \tan^2 ax \, dx$	14
10	[1]:14.438	$\int \frac{dx}{p + q \tan ax} \, dx$	16
11	[1]:14.439	$\int \tan^n ax \, dx$	18

1 [1]:14.429  $\int \tan ax \, dx$

$$\int \tan ax = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| = \frac{1}{a} \ln |\sec ax|$$

```

(*)≡
)spool schaum20.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(tan(a*x),x)
--R
--R
--R              2
--R      log(tan(a x) + 1)
--R (1)  -----
--R              2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb1:=-1/a*log(cos(a*x))
--R
--R      log(cos(a x))
--R (2)  - -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
bb2:=1/a*log(sec(a*x))
--R
--R      log(sec(a x))
--R (3)  -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
cc1:=aa-bb1
--R
--R              2
--R      log(tan(a x) + 1) + 2log(cos(a x))
--R (4)  -----

```

```

--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R          sin(a)
--R   (5)  tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 6
dd1:=tanrule cc1
--R
--R          2          2
--R      sin(a x) + cos(a x)
--R   log(-----) + 2log(cos(a x))
--R          2
--R      cos(a x)
--R   (6) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 7
ee1:=expandLog dd1
--R
--R          2          2
--R      log(sin(a x) + cos(a x) )
--R   (7) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 8
sincossqrrule:=rule(sin(a)^2+cos(a)^2 == 1)
--R
--R          2          2
--R   (8)  sin(a) + cos(a) + %K == %K + 1
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 9      14:429 Schaums and Axiom agree
ff1:=sincossqrrule ee1

```

```

--R
--R (9) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

**2 [1]:14.430**  $\int \tan^2 ax \, dx$

$$\int \tan^2 ax = \frac{\tan ax}{x} - x$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 10
aa:=integrate(tan(a*x)^2,x)
--R
--R
--R      tan(a x) - a x
--R (1)  -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 11
bb:=tan(a*x)/a-x
--R
--R      tan(a x) - a x
--R (2)  -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 12      14:430 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

3 [1]:14.431  $\int \tan^3 ax \, dx$

$$\int \tan^3 ax = \frac{\tan^2 ax}{2a} + \frac{1}{a} \ln |\cos ax|$$

```

(*)+=
)clear all

--S 13
aa:=integrate(tan(a*x)^3,x)
--R
--R
--R
--R      2      2
--R      - log(tan(a x) + 1) + tan(a x)
--R (1) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 14
bb:=tan(a*x)^2/(2*a)+1/a*log(cos(a*x))
--R
--R
--R      2
--R      2log(cos(a x)) + tan(a x)
--R (2) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 15
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      2
--R      - log(tan(a x) + 1) - 2log(cos(a x))
--R (3) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 16
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R
--R      sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

```

--E
--S 17
dd:=tanrule cc
--R
--R
--R      2      2
--R      sin(a x) + cos(a x)
--R      - log(-----) - 2log(cos(a x))
--R      2
--R      cos(a x)
--R (5) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 18
ee:=expandLog dd
--R
--R
--R      2      2
--R      log(sin(a x) + cos(a x) )
--R (6) - -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 19
sincossqrrule:=rule(sin(a)^2+cos(a)^2 == 1)
--R
--R
--R      2      2
--R      sin(a) + cos(a) + %L == %L + 1
--R (7) -----
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 20      14:431 Schaums and Axiom agree
ff:=sincossqrrule ee
--R
--R
--R (8) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.432  $\int \tan^n ax \sec^2 ax \, dx$

$$\int \tan^n ax \sec^2 ax = \frac{\tan^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 21
aa:=integrate(tan(a*x)^n*sec(a*x)^2,x)
```

```
--R
--R
--R          sin(a x)
--R      n log(-----)
--R          cos(a x)
--R      sin(a x)%e
--R (1) -----
--R      (a n + a)cos(a x)
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 22
bb:=tan(a*x)^(n+1)/((n+1)*a)
```

```
--R
--R          n + 1
--R      tan(a x)
--R (2) -----
--R          a n + a
```

Type: Expression Integer

```
--S 23
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          sin(a x)
--R      n log(-----)
--R          cos(a x)
--R      sin(a x)%e          n + 1
--R (3) -----          - cos(a x)tan(a x)
--R          (a n + a)cos(a x)
```

Type: Expression Integer

```
--S 24
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
```



```

--R      n log(x)      n
--R (4) %e      == x
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 25
dd:=explog cc
--R
--R      n + 1      sin(a x) n
--R - cos(a x)tan(a x) + sin(a x)(-----)
--R                                     cos(a x)
--R (5) -----
--R      (a n + a)cos(a x)
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 26
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R (6) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 27
ee:=tanrule dd
--R
--R      sin(a x) n + 1      sin(a x) n
--R - cos(a x)(-----) + sin(a x)(-----)
--R      cos(a x)      cos(a x)
--R (7) -----
--R      (a n + a)cos(a x)
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 28      14:432 Schaums and Axiom agree
ff:=complexNormalize ee
--R
--R (8) 0
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.433  $\int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax} dx$

$$\int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax} = \frac{1}{a} \ln |\tan ax|$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 29
aa:=integrate(sec(a*x)^2/tan(a*x),x)
--R
--R
--R          sin(a x)          2cos(a x)
--R    log(-----) - log(- -----)
--R          cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 30
bb:=1/a*log(tan(a*x))
--R
--R    log(tan(a x))
--R (2) -----
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 31
cc:=aa-bb
--R
--R          sin(a x)          2cos(a x)
--R    - log(tan(a x)) + log(-----) - log(- -----)
--R          cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 32
dd:=expandLog cc
--R
--R    - log(tan(a x)) + log(sin(a x)) - log(cos(a x)) - log(- 2)
--R (4) -----

```

```
--R
--R
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 33      14:433 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
```

```
--R
--R          log(- 2)
--R (5)  - ----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

**6 [1]:14.434**  $\int \frac{dx}{\tan ax} dx$

$$\int \frac{1}{\tan ax} = \frac{1}{a} \ln |\sin ax|$$

```

(*)+=
)clear all

--S 34
aa:=integrate(1/tan(a*x),x)
--R
--R
--R
--R      2
--R      - log(tan(a x) + 1) + 2log(tan(a x))
--R (1) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 35
bb:=1/a*log(sin(a*x))
--R
--R      log(sin(a x))
--R (2) -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 36
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      2
--R      - log(tan(a x) + 1) + 2log(tan(a x)) - 2log(sin(a x))
--R (3) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 37
complexNormalize cc
--R
--R (4) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

7 [1]:14.435  $\int x \tan ax \, dx$

$$\int x \tan ax = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^3}{3} + \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\}$$

<\*>+≡  
)clear all

--S 38 14:435 Axiom cannot compute this integral  
aa:=integrate(x\*tan(a\*x),x)

```
--R
--R
--R      x
--R    ++
--R (1) | %I tan(%I a)d%I
--R    ++
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

8 [1]:14.436  $\int \frac{\tan ax}{x} \, dx$

$$\int \frac{\tan ax}{x} = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots$$

<\*>+≡  
)clear all

--S 39 14:436 Axiom cannot compute this integral  
aa:=integrate(tan(a\*x)/x,x)

```
--R
--R
--R      x
--R    ++ tan(%I a)
--R (1) | ----- d%I
--R    ++      %I
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

9 [1]:14.437  $\int x \tan^2 ax \, dx$

$$\int x \tan^2 ax = \frac{x \tan ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln |\cos ax| - \frac{x^2}{2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 40
aa:=integrate(x*tan(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R      2      2 2
--R      - log(tan(a x) + 1) + 2a x tan(a x) - a x
--R (1) -----
--R      2
--R      2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 41
bb:=(x*tan(a*x))/a+1/a^2*log(cos(a*x))-x^2/2
--R
--R
--R      2 2
--R      2log(cos(a x)) + 2a x tan(a x) - a x
--R (2) -----
--R      2
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 42
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      2
--R      - log(tan(a x) + 1) - 2log(cos(a x))
--R (3) -----
--R      2
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 43
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R
--R      sin(a)

```

```

--R (4) tan(a) == -----
--R                cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 44
dd:=tanrule cc
--R
--R                2      2
--R      sin(a x) + cos(a x)
--R      - log(-----) - 2log(cos(a x))
--R                2
--R      cos(a x)
--R (5) -----
--R                2
--R              2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 45
ee:=expandLog dd
--R
--R                2      2
--R      log(sin(a x) + cos(a x) )
--R (6) - -----
--R                2
--R              2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 46
sincossqrrule:=rule(sin(a)^2+cos(a)^2 == 1)
--R
--R                2      2
--R      sin(a) + cos(a) + %R == %R + 1
--R (7) -----
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 47      14:437 Schaums and Axiom agree
ff:=sincossqrrule ee
--R
--R (8) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```





```

tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R          sin(a)
--R (4)  tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 52
dd:=tanrule cc
--R
--R (5)
--R          2          2
--R      sin(a x) + cos(a x)
--R - q log(-----) - 2q log(q sin(a x) + p cos(a x))
--R          2
--R      cos(a x)
--R +
--R          q sin(a x) + p cos(a x)
--R 2q log(-----)
--R          cos(a x)
--R /
--R          2          2
--R      2a q + 2a p
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 53
ee:=expandLog dd
--R
--R          2          2
--R      q log(sin(a x) + cos(a x) )
--R (6)  -----
--R          2          2
--R      2a q + 2a p
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 54
sincossqrrule:=rule(sin(a)^2+cos(a)^2 == 1)
--R
--R          2          2
--R (7)  sin(a) + cos(a) + %S == %S + 1
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 55      14:438 Schaums and Axiom agree
ff:=sincossqrrule ee
--R
--R      (8)  0
--R
--R                                                    Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.439  $\int \tan^n ax \, dx$

$$\int \tan^n ax = \frac{\tan^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2} ax$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 56      14:439 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(tan(a*x)^n,x)
--R
--R
--R      x
--R      ++      n
--R      (1)  |  tan(%I a) d%I
--R      ++
--R
--R                                                    Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

## References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p80