

\$SPAD/input schaum33.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.636	$\int \operatorname{csch} ax \, dx$	3
2	[1]:14.637	$\int \operatorname{csch}^2 ax \, dx$	5
3	[1]:14.638	$\int \operatorname{csch}^3 ax \, dx$	6
4	[1]:14.639	$\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, dx$	9
5	[1]:14.640	$\int \frac{dx}{\operatorname{csch} ax} \, dx$	14
6	[1]:14.641	$\int x \operatorname{csch} ax \, dx$	15
7	[1]:14.642	$\int x \operatorname{csch}^2 ax \, dx$	16
8	[1]:14.643	$\int \frac{\operatorname{csch} ax}{x} \, dx$	20
9	[1]:14.644	$\int \frac{dx}{q + p \operatorname{csch} ax} \, dx$	21
10	[1]:14.645	$\int \operatorname{csch}^n ax \, dx$	27

1 [1]:14.636 $\int \operatorname{csch} ax \, dx$

$$\int \operatorname{csch} ax = \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2}$$

```

(*)≡
)spool schaum33.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(csch(a*x),x)
--R
--R
--R      - log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1) + log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R (1) -----
--R                                          a
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=1/a*log(tanh((a*x)/2))
--R
--R      a x
--R      log(tanh(---))
--R      2
--R (2) -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      a x
--R      - log(tanh(---)) - log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      2
--R      +
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 4 14:636 Schaums and Axiom agree

dd:=complexNormalize cc

--R

--R (4) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

2 [1]:14.637 $\int \operatorname{csch}^2 ax \, dx$

$$\int \operatorname{csch}^2 ax = -\frac{\operatorname{coth} ax}{a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 5
aa:=integrate(csch(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R
--R (1) - -----
--R                2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 6
bb:=-coth(a*x)/a
--R
--R
--R      coth(a x)
--R (2) - -----
--R           a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 7      14:637 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R
--R      2
--R      coth(a x)sinh(a x)  + 2cosh(a x)coth(a x)sinh(a x)
--R
--R      +
--R
--R      2
--R      (cosh(a x)  - 1)coth(a x) - 2
--R
--R      /
--R
--R      2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

3 [1]:14.638 $\int \operatorname{csch}^3 ax \, dx$

$$\int \operatorname{csch}^3 ax = -\frac{\operatorname{csch} ax \coth ax}{2a} - \frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 8
aa:=integrate(csch(a*x)^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R      4      3      2      2
--R      sinh(a x) + 4cosh(a x)sinh(a x) + (6cosh(a x) - 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (4cosh(a x) - 4cosh(a x))sinh(a x) + cosh(a x) - 2cosh(a x) + 1
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      4      3      2      2
--R      - sinh(a x) - 4cosh(a x)sinh(a x) + (- 6cosh(a x) + 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (- 4cosh(a x) + 4cosh(a x))sinh(a x) - cosh(a x) + 2cosh(a x) - 1
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      3      2      2
--R      - 2sinh(a x) - 6cosh(a x)sinh(a x) + (- 6cosh(a x) - 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3
--R      - 2cosh(a x) - 2cosh(a x)
--R      /
--R      4      3      2      2
--R      2a sinh(a x) + 8a cosh(a x)sinh(a x) + (12a cosh(a x) - 4a)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (8a cosh(a x) - 8a cosh(a x))sinh(a x) + 2a cosh(a x) - 4a cosh(a x)
--R      +
--R      2a
--R
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

--S 9

bb:=- (csch(a*x)*coth(a*x))/(2*a)-1/(2*a)*log(tanh((a*x)/2))

--R

$$-\log(\tanh(\frac{ax}{2})) - \coth(ax)\operatorname{csch}(ax)$$

(2) -----
2a

Type: Expression Integer

--E

--S 10 14:638 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

(3)

$$\begin{aligned} & \sinh^4(ax) + 4\cosh^3(ax)\sinh(ax) + (6\cosh^2(ax) - 2)\sinh^2(ax) \\ & + (4\cosh^3(ax) - 4\cosh(ax))\sinh^2(ax) + \cosh^4(ax) - 2\cosh^2(ax) + 1 \\ & * \log(\tanh(\frac{ax}{2})) \\ & + \sinh^4(ax) + 4\cosh^3(ax)\sinh(ax) + (6\cosh^2(ax) - 2)\sinh^2(ax) \\ & + (4\cosh^3(ax) - 4\cosh(ax))\sinh^2(ax) + \cosh^4(ax) - 2\cosh^2(ax) + 1 \\ & * \log(\sinh(ax) + \cosh(ax) + 1) \\ & + \sinh^4(ax) - 4\cosh^3(ax)\sinh(ax) + (-6\cosh^2(ax) + 2)\sinh^2(ax) \\ & + (-4\cosh^3(ax) + 4\cosh(ax))\sinh^2(ax) - \cosh^4(ax) + 2\cosh^2(ax) - 1 \\ & * \log(\sinh(ax) + \cosh(ax) - 1) \\ & + \coth^4(ax)\operatorname{csch}(ax)\sinh(ax) \\ & + (4\cosh^3(ax)\coth(ax)\operatorname{csch}(ax) - 2)\sinh^2(ax) \end{aligned}$$

```

--R      2      2
--R      ((6cosh(a x) - 2)coth(a x)csch(a x) - 6cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      3      2
--R      ((4cosh(a x) - 4cosh(a x))coth(a x)csch(a x) - 6cosh(a x) - 2)sinh(a x)
--R      +
--R      4      2      3
--R      (cosh(a x) - 2cosh(a x) + 1)coth(a x)csch(a x) - 2cosh(a x) - 2cosh(a x)
--R      /
--R      4      3      2      2
--R      2a sinh(a x) + 8a cosh(a x)sinh(a x) + (12a cosh(a x) - 4a)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (8a cosh(a x) - 8a cosh(a x))sinh(a x) + 2a cosh(a x) - 4a cosh(a x)
--R      +
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


4 [1]:14.639 $\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, dx$

$$\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 11
aa:=integrate(csch(a*x)^n*coth(a*x),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      - sinh(n log(-----))
--R                    2                               2
--R          sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1
--R      +
--R          2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      - cosh(n log(-----))
--R                    2                               2
--R          sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1
--R      /
--R      a n
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 12
bb:=-csch(a*x)^n/(n*a)
--R
--R
--R          n
--R      csch(a x)
--R (2)  - ----
--R          a n
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 13
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R
--R          2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      - sinh(n log(-----))
--R                    2                               2
--R          sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1
--R      +
```

```

--R
--R      2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      - cosh(n log(-----))
--R                                 2
--R      sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1
--R
--R      +
--R      n
--R      csch(a x)
--R
--R      /
--R      a n
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 14
cschrule:=rule(csch(x) == 1/sinh(x))
--R
--R
--R      1
--R      (4) csch(x) == -----
--R      sinh(x)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 15
dd:=cschrule cc
--R
--R      (5)
--R
--R      2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      - sinh(n log(-----))
--R                                 2
--R      sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1
--R
--R      +
--R
--R      2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      - cosh(n log(-----))
--R                                 2
--R      sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1
--R
--R      +
--R      1      n
--R      (-----)
--R      sinh(a x)
--R
--R      /
--R      a n
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 16
ee:=expandLog dd
--R

```

```

--R (6)
--R      sinh
--R      2
--R      n log(sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      - n log(sinh(a x) + cosh(a x)) - n log(2)
--R      +
--R      -
--R      cosh
--R      2
--R      n log(sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      - n log(sinh(a x) + cosh(a x)) - n log(2)
--R      +
--R      1      n
--R      (-----)
--R      sinh(a x)
--R      /
--R      a n
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 17
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (7)  sinh(x) == -----
--R      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 18
ff:=sinhsqrrule ee
--R
--R      (8)
--R      sinh
--R      2
--R      4cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) + 2cosh(a x) - 3
--R      n log(-----)
--R      2
--R      +
--R      - n log(sinh(a x) + cosh(a x)) - n log(2)
--R      +
--R      -
--R      cosh
--R
--R                                          2

```

```

--R          4cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) + 2cosh(a x) - 3
--R      n log(-----)
--R                                  2
--R      +
--R      - n log(sinh(a x) + cosh(a x)) - n log(2)
--R  +
--R      1      n
--R  (-----)
--R  sinh(a x)
--R  /
--R  a n
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 19
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R  (9)  cosh(x) == -----
--R                    2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 20
gg:=coshsqrrule ff
--R
--R  (10)
--R      sinh
--R      n log(2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) - 1)
--R      +
--R      - n log(sinh(a x) + cosh(a x)) - n log(2)
--R  +
--R      -
--R      cosh
--R      n log(2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) - 1)
--R      +
--R      - n log(sinh(a x) + cosh(a x)) - n log(2)
--R  +
--R      1      n
--R  (-----)
--R  sinh(a x)
--R  /
--R  a n
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 21
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--I
--R          %0 sinh(y + x) - %0 sinh(y - x)
--I (11) %0 cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                  2
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 22
hh:=sinhcoshrule gg
--R
--R (12)
--R      sinh
--R      n log(sinh(2a x) + cosh(2a x) - 1) - n log(sinh(a x) + cosh(a x))
--R      +
--R      - n log(2)
--R
--R      +
--R      -
--R      cosh
--R      n log(sinh(2a x) + cosh(2a x) - 1) - n log(sinh(a x) + cosh(a x))
--R      +
--R      - n log(2)
--R
--R      +
--R      1      n
--R      (-----)
--R      sinh(a x)
--R
--R      /
--R      a n
--R
--R          Type: Expression Integer
--E

--S 23      14:639 Schaums and Axiom agree
ii:=complexNormalize hh
--R
--R (13) 0
--R
--R          Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.640 $\int \frac{dx}{\operatorname{csch} ax} dx$
 $\int \frac{1}{\operatorname{csch} ax} = \frac{1}{a} \operatorname{cosh} ax$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 24
aa:=integrate(1/csch(a*x),x)
```

```
--R
--R
--R      cosh(a x)
--R (1)  -----
--R      a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 25
bb:=1/a*cosh(a*x)
```

```
--R
--R      cosh(a x)
--R (2)  -----
--R      a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 26      14:640 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

6 [1]:14.641 $\int x \operatorname{csch} ax \, dx$

$$\int x \operatorname{csch} ax = \frac{1}{a^2} \left\{ ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \dots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1} - 1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 27      14:641 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(x*csch(a*x),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R          x
```

```
--R      ++
```

```
--I (1) | %0 csch(%0 a)d%0
```

```
--R      ++
```

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

7 [1]:14.642 $\int x \operatorname{csch}^2 ax \, dx$

$$\int x \operatorname{csch}^2 ax = -\frac{x \coth ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sinh ax$$

```

(*)+=
)clear all

--S 28
aa:=integrate(x*csch(a*x)^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R          2
--R      (sinh(a x)  + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x)  - 1)
--R      *
--R          2sinh(a x)
--R      log(- -----)
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R          2
--R      - 2a x sinh(a x)  - 4a x cosh(a x)sinh(a x) - 2a x cosh(a x)  2
--R      /
--R          2      2      2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 29
bb:=- (x*coth(a*x))/a+1/a^2*log(sinh(a*x))
--R
--R      log(sinh(a x)) - a x coth(a x)
--R (2) -----
--R          2
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 30
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          2
--R      (- sinh(a x)  - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x)  + 1)log(sinh(a x))
--R      +
--R          2
--R          2

```



```

--R      (sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      *
--R      2sinh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      (a x coth(a x) - 2a x)sinh(a x)
--R      +
--R      (2a x cosh(a x)coth(a x) - 4a x cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      (a x cosh(a x) - a x)coth(a x) - 2a x cosh(a x)
--R      /
--R      a sinh(a x) + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 31

dd:=expandLog cc

```

--R
--R      (4)
--R      (- sinh(a x) - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x) + 1)
--R      *
--R      log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      (a x coth(a x) + log(- 2) - 2a x)sinh(a x)
--R      +
--R      (2a x cosh(a x)coth(a x) + (2log(- 2) - 4a x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      (a x cosh(a x) - a x)coth(a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(a x) - log(- 2)
--R      /
--R      a sinh(a x) + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 32

sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)

```

--R
--R      2    cosh(2x) - 1
--R      (5)  sinh(x) == -----

```

```

--R
--R      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 33
ee:=sinhsqrrule dd

```

```

--R
--R      (6)
--R
--R      (- 4cosh(a x)sinh(a x) - cosh(2a x) - 2cosh(a x)2 + 3)
--R      *
--R      log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      (4a x cosh(a x)coth(a x) + (4log(- 2) - 8a x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      (a x cosh(2a x) + 2a x cosh(a x)2 - 3a x)coth(a x)
--R      +
--R      (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x) + (2log(- 2) - 4a x)cosh(a x)2 - 3log(- 2)
--R      +
--R      2a x
--R      /
--R      2      2      2      2      2
--R      4a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) + 2a cosh(a x) - 3a
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 34
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)

```

```

--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (7) cosh(x) == -----
--R      2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 35
ff:=coshsqrrule ee

```

```

--R
--R      (8)
--R      (- 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(2a x) + 1)log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      (2a x cosh(a x)coth(a x) + (2log(- 2) - 4a x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      (a x cosh(2a x) - a x)coth(a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x) - log(- 2)

```

```

--R /
--R      2      2      2
--R      2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 36
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--R                                          %P sinh(y + x) - %P sinh(y - x)
--I (9) %P cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                          2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 37
gg:=sinhcoshrule ff
--R
--R (10)
--R      (- sinh(2a x) - cosh(2a x) + 1)log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      (a x coth(a x) + log(- 2) - 2a x)sinh(2a x)
--R      +
--R      (a x cosh(2a x) - a x)coth(a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x) - log(- 2)
--R /
--R      2      2      2
--R      a sinh(2a x) + a cosh(2a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 38      14:642 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      - log(- 1) + log(- 2)
--R (11) -----
--R              2
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

8 [1]:14.643 $\int \frac{\operatorname{csch} ax}{x} dx$

$$\int \frac{\operatorname{csch} ax}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} + \dots + \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1} - 1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots$$

<*)+≡

)clear all

--S 39 14:643 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(csch(a*x)/x,x)

--R

--R

--R

--I

--I

--I

--R

--E

$$(1) \quad \int \frac{\operatorname{csch}(ax)}{x} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

9 [1]:14.644 $\int \frac{dx}{q + p \operatorname{csch} ax} dx$

$$\int \frac{1}{q + p \operatorname{csch} ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \int \frac{dx}{p + q \sinh ax}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 40
aa:=integrate(1/(q+p*csch(a*x)),x)
```

```
--R
--R
--R (1)
--R      p
--R      *
--R      log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) + q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (2q + 2p q)sinh(a x) + (2q + 2p q)cosh(a x) + 2p q + 2p
--R      /
--R      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a x \|q + p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a q \|q + p
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
--S 41
```

```

t1:=integrate(1/(p+q*sinh(a*x)),x)
--R
--R (2)
--R log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) + q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (- 2q - 2p q)sinh(a x) + (- 2q - 2p q)cosh(a x) - 2p q - 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a\|q + p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 42
bb:=x/q-p/q*t1
--R
--R (3)
--R -
--R      p
--R      *
--R      log
--R      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      q cosh(a x) + 2p q cosh(a x) + q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +

```

```

--R          3      2          3      2          2      3
--R      (- 2q  - 2p q)sinh(a x) + (- 2q  - 2p q)cosh(a x) - 2p q  - 2p
--R      /
--R          2
--R      q sinh(a x)  + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R  +
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a x\|q  + p
--R  /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a q\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 43
cc:=aa-bb
--R
--R  (4)
--R      p
--R      *
--R      log
--R          2      2      2          2      2
--R      q sinh(a x)  + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R          2      2
--R      2p q cosh(a x) + q  + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q  + p
--R      +
--R          3      2          3      2          2      3
--R      (2q  + 2p q)sinh(a x) + (2q  + 2p q)cosh(a x) + 2p q  + 2p
--R      /
--R          2
--R      q sinh(a x)  + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R  +
--R      p
--R      *
--R      log

```

```

--R          2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R          2      2
--R      2p q cosh(a x) + q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +
--R          3      2      3      2      2      3
--R      (- 2q - 2p q)sinh(a x) + (- 2q - 2p q)cosh(a x) - 2p q - 2p
--R      /
--R          2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a q\|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)

```

```

--R
--R          2      cosh(2x) - 1
--R      (5)  sinh(x) == -----
--R          2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 45
dd:=sinhsqrrule cc

```

```

--R
--R      (6)
--R          p
--R      *
--R      log
--R          2      2      2
--R      (4q cosh(a x) + 4p q)sinh(a x) + q cosh(2a x)
--R      +
--R          2      2      2      2
--R      2q cosh(a x) + 4p q cosh(a x) + q + 4p
--R      *

```



```

--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|q  + p
--R      +
--R          3      2          3      2          2      3
--R      (4q  + 4p q)sinh(a x) + (4q  + 4p q)cosh(a x) + 4p q  + 4p
--R      /
--R          2
--R      (4q cosh(a x) + 4p)sinh(a x) + q cosh(2a x) + 2q cosh(a x)
--R      +
--R      4p cosh(a x) - 3q
--R      +
--R      p
--R      *
--R      log
--R          2          2
--R      (4q cosh(a x) + 4p q)sinh(a x) + q cosh(2a x)
--R      +
--R          2      2          2      2
--R      2q cosh(a x)  + 4p q cosh(a x) + q  + 4p
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|q  + p
--R      +
--R          3      2          3      2          2      3
--R      (- 4q  - 4p q)sinh(a x) + (- 4q  - 4p q)cosh(a x) - 4p q  - 4p
--R      /
--R          2
--R      (4q cosh(a x) + 4p)sinh(a x) + q cosh(2a x) + 2q cosh(a x)
--R      +
--R      4p cosh(a x) - 3q
--R      /
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      a q\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 46
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R          2      cosh(2x) + 1
--R      (7)  cosh(x) == -----
--R          2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

--E

--S 47

ee:=coshsqrrule dd

--R

--R (8)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$\begin{aligned} & p \log \left(\frac{(2q \cosh(ax) + 2p q) \sinh(ax) + q \cosh(2ax) + 2p q \cosh(ax) + q^2 + 2p}{\sqrt{q^2 + p}} \right) \\ & + \frac{(2q^3 + 2p q^2) \sinh(ax) + (2q^3 + 2p q^2) \cosh(ax) + 2p q^2 + 2p^3}{(2q \cosh(ax) + 2p) \sinh(ax) + q \cosh(2ax) + 2p \cosh(ax) - q} \\ & + p \log \left(\frac{(2q \cosh(ax) + 2p q) \sinh(ax) + q \cosh(2ax) + 2p q \cosh(ax) + q^2 + 2p}{\sqrt{q^2 + p}} \right) \\ & + \frac{(-2q^3 - 2p q^2) \sinh(ax) + (-2q^3 - 2p q^2) \cosh(ax) - 2p q^2 - 2p^3}{(2q \cosh(ax) + 2p) \sinh(ax) + q \cosh(2ax) + 2p \cosh(ax) - q} \\ & \frac{1}{a q \sqrt{q^2 + p}} \end{aligned}$$

Type: Expression Integer

```

--E
--S 48      14:644 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=complexNormalize ee
--R
--R          4      2 2
--R      p log(q  + p q )
--R (9)  -----
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R      a q\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

10 [1]:14.645 $\int \operatorname{csch}^n ax \, dx$

$$\int \operatorname{csch}^n ax = \frac{-\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{a(n-1)} - \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{csch}^{n-2} ax$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 49      14:645 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(csch(a*x)^n,x)
--R
--R
--R          x
--R      ++          n
--R (1)  |  csch(%0 a) d%0
--R      ++
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp91-92