

\$SPAD/input schaum4.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.113	$\int \frac{px + q}{\sqrt{ax + b}} dx$	3
2	[1]:14.114	$\int \frac{dx}{(px + q)\sqrt{ax + b}}$	4
3	[1]:14.115	$\int \frac{\sqrt{ax + b}}{px + q} dx$	9
4	[1]:14.116	$\int (px + b)^n \sqrt{ax + b} dx$	13
5	[1]:14.117	$\int \frac{dx}{(px + b)^n \sqrt{ax + b}}$	13
6	[1]:14.118	$\int \frac{(px + q)^n}{\sqrt{ax + b}} dx$	14
7	[1]:14.119	$\int \frac{\sqrt{ax + b}}{(px + q)^n} dx$	14

$$1 \quad [1]:14.113 \quad \int \frac{px + q}{\sqrt{ax + b}} dx$$

$$\int \frac{px + q}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2(apx + 3aq - 2bp)}{3a^2} \sqrt{ax + b}$$

```

(*)≡
)spool schaum4.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate((p*x+q)/sqrt(a*x+b),x)
--R
--R
--R
--R
--R
--R
--R
--R      +-----+
--R      (2a p x + 6a q - 4b p)\|a x + b
--R  (1) -----
--R                    2
--R                   3a
--R
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=(2*(a*p*x+3*a*q-2*b*p))/(3*a^2)*sqrt(a*x+b)
--R
--R
--R
--R
--R
--R
--R
--R      +-----+
--R      (2a p x + 6a q - 4b p)\|a x + b
--R  (2) -----
--R                    2
--R                   3a
--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3      14:113 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R  (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.114 $\int \frac{dx}{(px + q)\sqrt{ax + b}}$

$$\int \frac{1}{(px + q)\sqrt{ax + b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{bp-aq}\sqrt{p}} \ln \left(\frac{\sqrt{p(ax+b)} - \sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)} + \sqrt{bp-aq}} \right) \\ \frac{2}{\sqrt{aq-bp}\sqrt{p}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

```
<*)+=
```

```
)clear all
```

```
--S 4
```

```
aa:=integrate(1/((p*x+q)*sqrt(a*x+b)),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R      +-----+
--R      |               2
--R      (2a p q - 2b p)\|a x + b + (a p x - a q + 2b p)\|- a p q + b p
--R      log(-----)
--R      p x + q
--R      [-----,
--R      |               2
--R      \|- a p q + b p
--R      +-----+
--R      |               2 +-----+
--R      \|a p q - b p \|a x + b
--R      2atan(-----)
--R      a q - b p
--R      -----]
--R      +-----+
--R      |               2
--R      \|a p q - b p
```

```
Type: Union(List Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 5
```

```
aa1:=aa.1
```

```
--R
```

```
--R (2)
```

```
--R      +-----+
--R      |               2
--R      (2a p q - 2b p)\|a x + b + (a p x - a q + 2b p)\|- a p q + b p
--R      log(-----)
--R      p x + q
```

```

--R -----
--R                                     +-----+
--R                                     |          2
--R                                     \|- a p q + b p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 6
aa2:=aa.2
--R
--R                                     +-----+
--R                                     |          2 +-----+
--R                                     \|a p q - b p \|a x + b
--R      2atan(-----)
--R                                     a q - b p
--R (3) -----
--R                                     +-----+
--R                                     |          2
--R                                     \|a p q - b p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 7
bb1:=1/sqrt(b*p-a*q)*log((sqrt(p*(a*x+b))-sqrt(b*p-a*q))/(sqrt(p*(a*x+b))+sqrt(b*p-a*q)))
--R
--R                                     +-----+ +-----+
--R                                     \|a p x + b p - \|- a q + b p
--R      log(-----)
--R                                     +-----+ +-----+
--R                                     \|a p x + b p + \|- a q + b p
--R (4) -----
--R                                     +-----+
--R                                     \|- a q + b p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 8
bb2:=2/(sqrt(a*q-b*p)*sqrt(p))*atan(sqrt((p*(a*x+b))/(a*q-b*p)))
--R
--R                                     +-----+
--R                                     |a p x + b p
--R      2atan( |----- )
--R                                     \| a q - b p
--R (5) -----
--R                                     +-+ +-----+
--R                                     \|p \|a q - b p

```

--R Type: Expression Integer
--E

--S 9

cc1:=aa1-bb1

--R (6)

$$\frac{\sqrt{-a q + b p} \log\left(\frac{(2 a p q - 2 b p) \sqrt{a x + b} + (a p x - a q + 2 b p) \sqrt{-a p q + b p}}{p x + q}\right) - \sqrt{-a p q + b p} \log\left(\frac{\sqrt{a p x + b p} - \sqrt{-a q + b p}}{\sqrt{a p x + b p} + \sqrt{-a q + b p}}\right)}{\sqrt{-a p q + b p} \sqrt{-a q + b p}}$$

--R Type: Expression Integer
--E

--S 10

cc2:=aa1-bb2

--R (7)

$$\frac{\sqrt{p} \sqrt{a q - b p} \log\left(\frac{(2 a p q - 2 b p) \sqrt{a x + b} + (a p x - a q + 2 b p) \sqrt{-a p q + b p}}{p x + q}\right) - 2 \sqrt{-a p q + b p} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{a p x + b p}}{\sqrt{a q - b p}}\right)}{1}$$

```

--R      +-----+
--R      |          2 +-+ +-----+
--R      \|- a p q + b p \|p \|a q - b p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 11
cc3:=aa2-bb1

```

```

--R (8)
--R      +-----+      +-----+      +-----+
--R      |          2      \|a p x + b p - \|- a q + b p
--R      - \|a p q - b p log(-----)
--R                          +-----+      +-----+
--R                          \|a p x + b p + \|- a q + b p
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      |          2 +-----+
--R      +-----+ \|a p q - b p \|a x + b
--R      2\|- a q + b p atan(-----)
--R                          a q - b p
--R
--R      /
--R
--R      +-----+
--R      +-----+ |          2
--R      \|- a q + b p \|a p q - b p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 12      14:114 Axiom cannot simplify these answers
cc4:=aa2-bb2

```

```

--R (9)
--R
--R      +-----+
--R      |          2 +-----+
--R      +-+ +-----+ \|a p q - b p \|a x + b
--R      2\|p \|a q - b p atan(-----)
--R                          a q - b p
--R
--R      +
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      |          2      |a p x + b p
--R      - 2\|a p q - b p atan( |----- )
--R                          \| a q - b p
--R
--R      /
--R
--R      +-----+
--R      +-+ +-----+ |          2
--R      \|p \|a q - b p \|a p q - b p

```

--R
--E

Type: Expression Integer

3 [1]:14.115 $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q} dx$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \frac{\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}} \ln\left(\frac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \frac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \frac{2\sqrt{aq-bp}}{p\sqrt{p}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 13
aa:=integrate(sqrt(a*x+b)/(p*x+q),x)
--R
--R
--R (1)
--R [
--R
--R          +-----+
--R          |- a q + b p  +-----+
--R +-----+ - 2p |----- \| a x + b  + a p x - a q + 2b p
--R |- a q + b p  \|      p
--R |----- log(-----)
--R \|      p                                  p x + q
--R +
--R          +-----+
--R          2\| a x + b
--R /
--R p
--R ,
--R          +-----+          +-----+
--R          |a q - b p          \| a x + b          +-----+
--R - 2 |----- atan(----- + 2\| a x + b
--R \|      p          +-----+
--R          |a q - b p
--R          |-----
--R          \|      p
--R -----]
--R
--R          p
--R
--R                                         Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

--S 14
aa1:=aa.1
--R
--R (2)
--R
--R          +-----+

```

```

--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | - a q + b p  - 2p |-----+ \| a x + b  + a p x - a q + 2b p
--R      +-----+      \|      p
--R      |-----+ log(-----)
--R      \|      p      p x + q
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      2\| a x + b
--R
--R      /
--R      p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 15
aa2:=aa.2

```

```

--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | a q - b p  \| a x + b  +-----+
--R      - 2 |-----+ atan(----- + 2\| a x + b
--R      \|      p      +-----+
--R      | a q - b p
--R      |-----+
--R      \|      p
--R
--R      (3) -----
--R      p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 16

```

```

bb1:=(2*sqrt(a*x+b))/p+sqrt(b*p-a*q)/(p*sqrt(p))*log((sqrt(p*(a*x+b))-sqrt(b*p-a*q))/(
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      +-----+ \| a p x + b p  - \| - a q + b p  +-+ +-----+
--R      \| - a q + b p log(-----) + 2\| p \| a x + b
--R      +-----+      +-----+
--R      \| a p x + b p  + \| - a q + b p
--R
--R      (4) -----
--R      +-+
--R      p\| p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 17

```

```

bb2:=(2*sqrt(a*x+b))/p-(2*sqrt(a*q-b*p))/(p*sqrt(p))*atan(sqrt((p*(a*x+b))/(a*q-b*p)))
--R
--R      +-----+

```

```

--R      +-----+      |a p x + b p      +-+ +-----+
--R      - 2\|a q - b p atan( |----- ) + 2\|p \|a x + b
--R                          \| a q - b p
--R (5) -----
--R                               +-+
--R                              p\|p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 18
cc1:=aa1-bb1
--R
--R (6)
--R      +-----+      +-----+
--R      +-----+      \|a p x + b p - \|- a q + b p
--R      - \|- a q + b p log(-----)
--R                               +-----+      +-----+
--R                              \|a p x + b p + \|- a q + b p
--R +
--R                               +-----+
--R                               | - a q + b p +-----+
--R      +-----+      - 2p |----- \|a x + b + a p x - a q + 2b p
--R      | - a q + b p +-+      \|      p
--R      |----- \|p log(-----)
--R      \|      p                                          p x + q
--R /
--R      +-+
--R      p\|p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 19
cc2:=aa1-bb2
--R
--R (7)
--R      +-----+
--R      +-----+      +-----+
--R      +-----+      - 2p |----- \|a x + b + a p x - a q + 2b p
--R      | - a q + b p +-+      \|      p
--R      |----- \|p log(-----)
--R      \|      p                                          p x + q
--R +
--R      +-----+      +-----+
--R      +-----+      |a p x + b p
--R      2\|a q - b p atan( |----- )
--R                          \| a q - b p

```

```

--R /
--R      +-+
--R      p\|p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 20
cc3:=aa2-bb1

```

```

--R (8)
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      +-----+ \|a p x + b p - \|- a q + b p
--R      - \|- a q + b p log(-----)
--R      +-----+      +-----+
--R      \|a p x + b p + \|- a q + b p
--R
--R      +
--R      +-----+      +-----+
--R      +-+ \|a q - b p \|a x + b
--R      - 2\|p |-----) atan(-----)
--R      \| p      +-----+
--R      \|a q - b p
--R      |-----)
--R      \| p
--R
--R /
--R      +-+
--R      p\|p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 21      14:115 Axiom cannot simplify these answers
cc4:=aa2-bb2

```

```

--R (9)
--R
--R      +-----+      +-----+      +-----+
--R      +-+ \|a q - b p \|a x + b +-----+ \|a p x + b p
--R      - 2\|p |-----) atan(-----) + 2\|a q - b p atan( |----- )
--R      \| p      +-----+      \| a q - b p
--R      \|a q - b p
--R      |-----)
--R      \| p
--R
--R -----
--R
--R      +-+
--R      p\|p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.116 $\int (px + b)^n \sqrt{ax + b} dx$

$$\int (px + b)^n \sqrt{ax + b} = \frac{2(px + q)^{n+1} \sqrt{ax + b}}{(2n + 3)p} + \frac{bp - aq}{(2n + 3)p} \int \frac{(px + q)^n}{\sqrt{ax + b}}$$

$\langle * \rangle + \equiv$

)clear all

--S 22 14:116 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate((p*x+q)^n*sqrt(a*x+b),x)

--R

--R

--R

```
--R      x
--R      ++          n +-----+
--R (1) | (q + %L p) \|b + %L a d%L
--R      ++
```

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

5 [1]:14.117 $\int \frac{dx}{(px + b)^n \sqrt{ax + b}}$

$$\int \frac{1}{(px + b)^n \sqrt{ax + b}} = \frac{\sqrt{ax + b}}{(n - 1)(aq - bp)(px + q)^{n-1}} + \frac{(2n - 3)a}{2(n - 1)(aq - bp)} \int \frac{1}{(px + q)^{n-1} \sqrt{ax + b}}$$

$\langle * \rangle + \equiv$

)clear all

--S 23 14:117 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(1/((p*x+q)^n*sqrt(a*x+b)),x)

--R

--R

--R

```
--R      x
--R      ++          1
--R (1) | ----- d%L
--R      ++          n +-----+
--R      (q + %L p) \|b + %L a
```

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

6 [1]:14.118 $\int \frac{(px + q)^n}{\sqrt{ax + b}} dx$

$$\int \frac{(px + q)^n}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2(px + q)^n \sqrt{ax + b}}{(2n + 1)a} + \frac{2n(aq - bp)}{(2n + 1)a} \int \frac{(px + q)^{n-1}}{\sqrt{ax + b}}$$

<*)+≡
)clear all

--S 24 14:118 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate((p*x+q)^n/sqrt(a*x+b),x)

--R

--R

```
--R          x          n
--I      ++  (q + %L p)
--I  (1)  | ----- d%L
--R      ++  +-----+
--I          \|b + %L a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--R

--E

7 [1]:14.119 $\int \frac{\sqrt{ax + b}}{(px + q)^n} dx$

$$\int \frac{\sqrt{ax + b}}{(px + q)^n} = \frac{-\sqrt{ax + b}}{(n - 1)p(px + q)^{n-1}} + \frac{a}{2(n - 1)p} \int \frac{1}{(px + q)^{n-1} \sqrt{ax + b}}$$

<*)+≡
)clear all

--S 25 14:119 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(sqrt(a*x+b)/(p*x+q)^n,x)

--R

--R

```
--R          x  +-----+
--I      ++  \|b + %L a
--I  (1)  | ----- d%L
--R      ++          n
--I          (q + %L p)
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--R

--E

)spool

)lisp (bye)

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p63